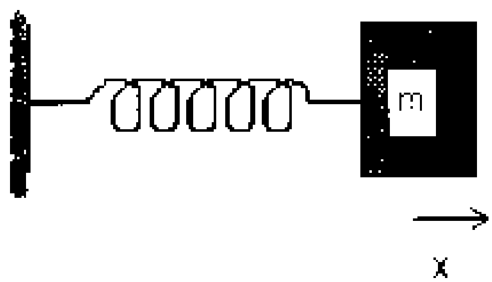
Tentamen Golven en Optica (21/11/96, 14.00-17.00)

Begin iedere opgave op een apart vel papier en zet daarop je naam. Vermeld op het eerste vel je naam, geboortedatum, studentnummer, studierichting, eerste jaar van inschrijving, adres met postcode, en het aantal ingeleverde bladen.

Vraagstukken 1 en 2 gelden als AN3a, uitsluitend voor ouderejaars die AN3b al gehaald hebben (vermeld dan 'AN3a' op het eerste vel); vraagstukken 3 en 4 gelden als AN3b, uitsluitend voor ouderejaars die AN3a al gehaald hebben (vermeld dan 'AN3b' op het eerste vel); alle overigen kunnen uitsluitend een ongedeeld tentamen (vraagstukken 1 t/m 4) doen.
(Tentamentijd voor iedereen 14.00-17.00; puntenverdeling zie onderaan tentamen)

Vraagstuk 1



Gegeven is een gedempt massa-veersysteem. De massaloze veer is aan één kant aan een vast punt bevestigd, aan de andere kant zit een massa m=25 kg. De veerconstante is k=75 Nm^{-1} en de massa ondervindt een visceuze demping met dempings-coëfficiënt b=30 Nm^{-1}s. Op tijdstip t=0 s heeft de massa een uitwijking x_0 =0.1 m en een snelheid v_0 =0 m/s.

a. Stel de differentiaalvergelijking voor de beweging van dit systeem op, en bereken de eigenfrequentie ω_0, γ (=b/m) en de kwaliteitsfactor Q.

b. Los de differentiaalvergelijking van a op, vul de randvoorwaarden in, en geef een expliciete uitdrukking voor de uitwijking x als functie van de tijd.

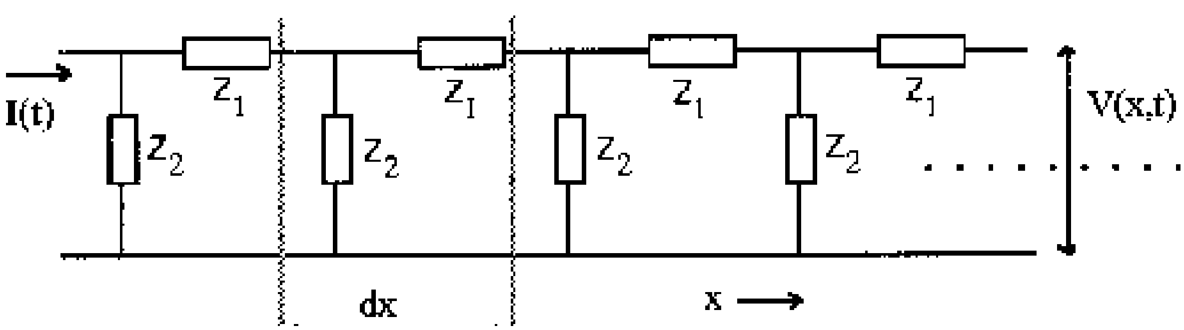
(Gegeven: $1/\cos x = \sqrt{\tan^2 x + 1}$)

c. Voor welke waarden van de dempingscoëfficiënt b is het systeem licht gedempt, kritisch gedempt en overgedempt?

d. De massaloze veer wordt nu vervangen door een veer met massa M=0.1 kg. Bereken de eigenfrequentie van dit systeem. (Hint: stel de energievergelijking voor het systeem op, voor de veer door de kinetische energie van kleine massa-elementjes te sommeren).

e. Geef kwalitatief aan hoe het systeem zou bewegen als M niet zeer veel kleiner dan m was?

Vraagstuk 2



Beschouw een half-oneindige transmissielijn met gedistribueerde impedanties $Z_1(\omega)$ (eenheid: Ωm^{-1}) en $Z_2(\omega)$ (eenheid: Ωm).

a. Laat voor de continue limiet ($dx \to 0$) zien dat als op de ingang van de transmissielijn (x=0) een stroom $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ wordt aangeboden, dit in de transmissielijn een spanningsverloop $V(x,t)$ oplevert van de vorm $V(x,t) = I_0 Z_0(\omega) e^{-\gamma(\omega)x} e^{i\omega t}$, waarin de karakteristieke impedantie $Z_0(\omega) = \sqrt{Z_1(\omega) Z_2(\omega)}$ en de propagatieconstante $\gamma(\omega) = \sqrt{Z_1(\omega)/Z_2(\omega)}$.

b. Gegeven is dat Z_1 een pure inductie is, $Z_1(\omega) = i\omega L$, en Z_2 een Ohmse weerstand, $Z_2(\omega) = R$. Bereken de propagatieconstante $\gamma(\omega)$, schrijf deze als de som van een reëel en een imaginair deel, en geef een fysische interpretatie van deze delen.

c. Laat zien dat de groepsnelheid van signalen door deze transmissielijn twee keer zo groot is als de fasesnelheid.

d. Geef twee redenen waarom de transmissielijn zoals in **b** gespecificeerd ongeschikt is voor signaaltransmissie.

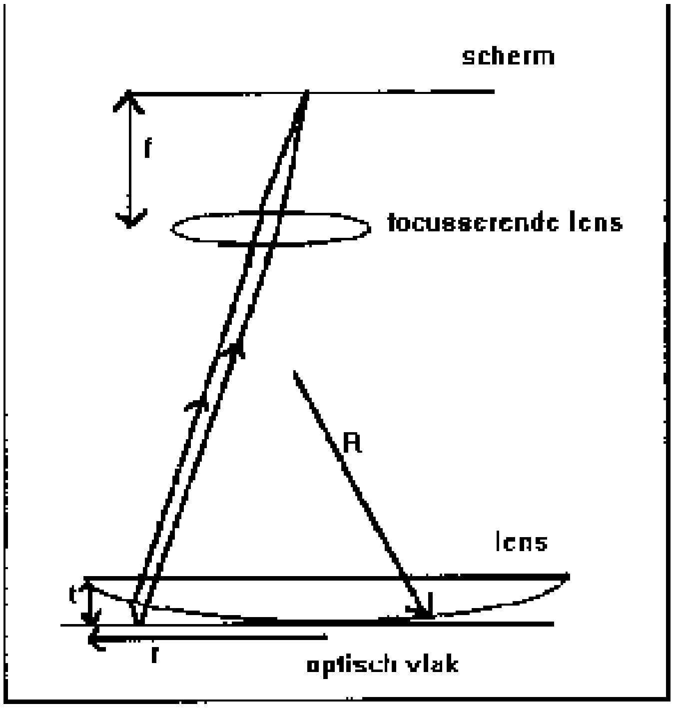
Vraagstuk 3

a. Licht valt op een grensvlak tussen een medium met brekingsindex n_1 en een medium met brekingsindex n_2. De tangentiële componenten van het electrische veld $\boldsymbol{E}$ en magnetische veld $\boldsymbol{H}$ moeten continu zijn bij het grensvlak, en verder geldt $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \omega} \vec{k} \times \vec{E}$ (met $\boldsymbol{k}$ de golfvector, μ_0 de permeabiliteit en ω de hoekfrequentie van het licht). Leid af dat de reflectiecoëfficiënt voor TE-golven (transversaal electrisch gepolariseerd licht, $\boldsymbol{E}$ loodrecht op het vlak van inval) gegeven wordt door $r_s = \frac{\cos(\theta) - n\cos(\phi)}{\cos(\theta) + n\cos(\phi)}$, met $n = n_2/n_1$, θ de hoek van inval, en ϕ de hoek van breking (θ en ϕ zoals gebruikelijk t.o.v. de normaal op het grensvlak).

b. Gegeven is dat voor TM-golven voor de reflectiecoëfficiënt geldt $r_p = \frac{-n\cos(\theta) + \cos(\phi)}{n\cos(\theta) + \cos(\phi)}$. Laat zowel voor TE- als TM-polarisatie zien dat er bij loodrechte inval en n>1 een fasedraaiing van 180^0 optreedt tussen de invallende en gereflecteerde lichtstraal.

c. Bereken de verhouding tussen de gereflecteerde en invallende intensiteit voor $\theta \approx 0$ voor een lucht naar glas (n_{glas}=1.7) en een kwarts naar lucht overgang (n_{kwarts}=1.45).

d. Een lens, aan een kant vlak en aan de andere kant met kromtestraal R, ligt op een optisch vlakke plaat. Licht (golflengte λ) valt via



vlakke plaat. Licht (golflengte λ) valt via een spiegel (niet in de tekening) op de lens. Er treedt interferentie op tussen lichtstralen gereflecteerd aan het gekromde oppervlak van de lens en lichtstralen gereflecteerd aan de vlakke plaat. Ga er van uit dat het licht bij benadering loodrecht invalt op beide oppervlakken. Het interferentiepatroon wordt door een lens op een scherm in het brandvlak van de lens afgebeeld. Laat zien dat t, de afstand tussen de optisch vlakke plaat en de lens bij benadering gelijk is aan $r^2/(2R)$ (hierbij is r de afstand vanaf het centrum van de lens, en wordt $r \ll R$ verondersteld). Leid de relatie tussen r, R en λ af waarbij constructieve interferentie optreedt.

e. De vlakbolle lens is van kwarts, de optisch vlakke plaat van glas. Wat is de verhouding van de intensiteiten van de op het scherm afgebeelde stralen gereflecteerd aan het gekromde oppervlak van de lens en aan het optisch vlak? Wat heeft dit voor gevolgen voor het interferentiepatroon?

Vraagstuk 4

Vanuit een bron S valt een golffunctie $U = U_0 \frac{e^{i(kr' - \omega t)}}{r'}$ op een apertuur A, met r' de afstand van S naar een punt in de apertuur. De resulterende amplitude in een punt P achter de apertuur wordt nu gegeven door de Fresnel-Kirchhoff integraal formule:

$$U_p = -\frac{ikU_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \iint \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} [\cos(\vec{n},\vec{r}) - \cos(\vec{n},\vec{r}\,')] dA$$

met r de afstand van P naar een punt in de apertuur, en $\boldsymbol{n}$ de normaalvector op het oppervlak van A.

a. In de Fraunhofer benadering zijn r en r' zeer groot, en valt de invallende (vlakke) golf loodrecht op de apertuur A. Laat zien dat dit leidt tot de sterk vereenvoudigde Fraunhofer benadering van de Fresnel-Kirchhoff formule (alle constante factoren mogen worden samengevoegd tot een constante C).

b. Gebruik de Fraunhofer benadering van de Fresnel-Kirchhoff formule om het Fraunhofer diffractiepatroon van een spleet met breedte b uit te rekenen, als functie van de hoek θ ten opzichte van de normaal van het vlak waarin de spleet ligt. Geef zowel de (relatieve) amplitudeverdeling als de (relatieve) irradiantieverdeling. Schets de irradiantieverdeling en bereken bij welke hoek θ het eerste nulpunt ligt.

c. Midden in de spleet van opgave **b** wordt, parallel aan de spleet, een ondoorzichtige strip met een breedte a gezet (met $a<b$). Bereken met behulp van de Fraunhofer benadering van de Fresnel-Kirchhoff formule de (relatieve) amplitudeverdeling van het resulterende Fraunhofer diffractiepatroon. Kies hiervoor het midden van de spleet als nulpunt voor de integratie.

d. Laat zien dat het resultaat bij opgave **c** ook volgt uit het principe van Babinet (complementaire aperturen) door de apertuur op te vatten als de superpositie van twee spleten met breedtes a en b.

Puntenverdeling

20 punten per vraagstuk, 1: {3,5,4,5,3}, 2: {8,3,5,4), 3: {5,3,3,5,4}, 4: {5,5,6,4}